



---

**I denne artikel diskuteres forskellige lastscenarier for personinducerede svingninger i fx gulvkonstruktioner og gangbroer, og hvordan enkeltpersoner og grupper frembringer forskellige dynamiske laster afhængigt af deres aktivitet og den konstruktion de bevæger sig på. Der gives en baggrund for de eksisterende lastmodeller og et indblik i deres styrende parametre.**

---

Dette er en fortsættelse af tidligere artikel om [egenfrekvenser og grænseaccelerationer](#) som vi udgav i marts 2020. Motivationen for artiklen er at dykke lidt dybere ned i modellering af personinducerede svingninger og forklare de forskellige lastscenarier og beregningsmetoder.

Udgangspunktet er almindelige bygningskonstruktioner, det vil sige slanke gulvkonstruktioner, trapper og indendørs gangbroer, da de indgår i langt de fleste større og moderne bygningskonstruktioner i dag. Som i den tidligere artikel, bygger indholdet her primært på internationale normer [1-3], Eurocodes [4-5], omfattende forskning i England og de på nuværende tidspunkt mest moderne guidelines [6-13] kombineret med forfatterens egen forskning og erfaringer på området.



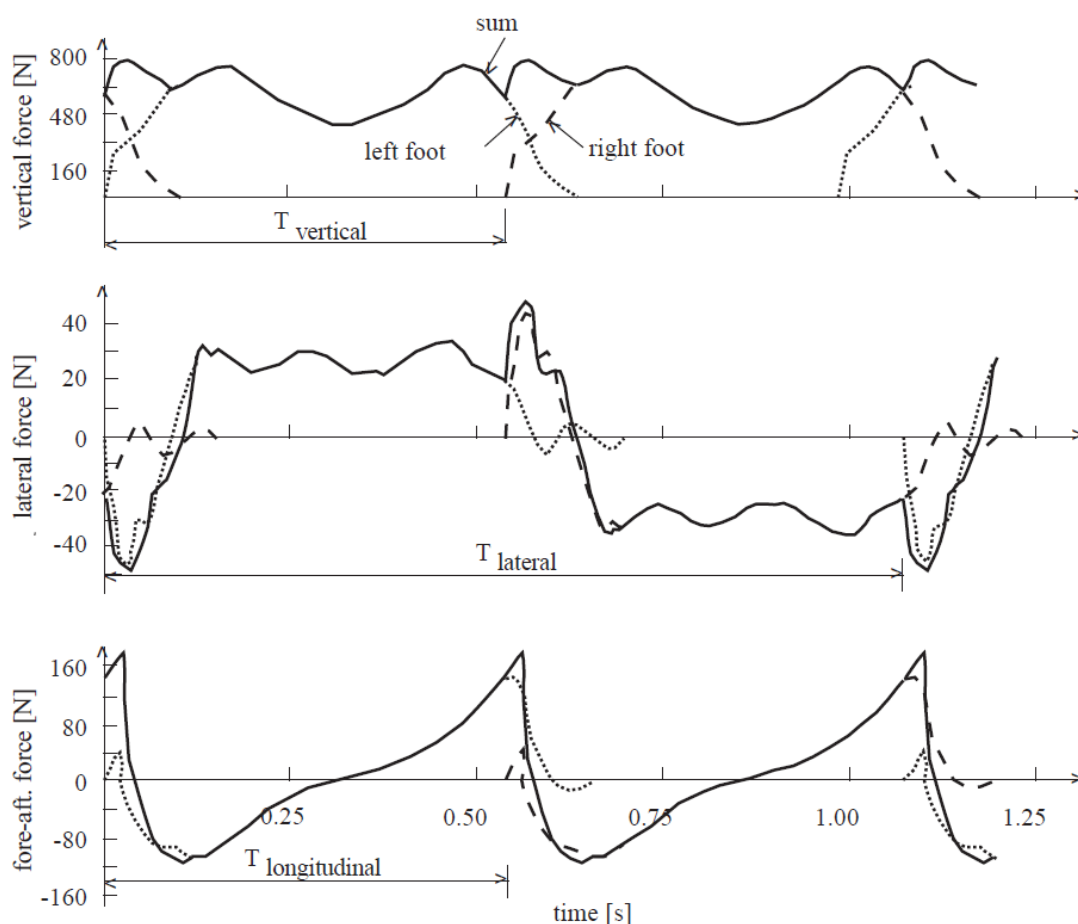
Personinduceret last forekommer som resultatet af personers rytmiske bevægelse såsom gang, løb, dans og hop. Lasterne er således dynamiske af natur med en grundfrekvens svarende til personens bevægelsesfrekvens. I denne artikel fokuserer vi på ganglaster fra enkeltpersoner og de statistiske karakteristika, som beskriver variation imellem forskellige individer, og hvilke overvejelser man bør gøre sig ved modellering af dynamisk last fra større grupper af personer.

## PERSONINDUCERET DYNAMISK BELASTNING

Den dynamiske last fra fodgængere er generelt en relativt kompleks størrelse, da den afhænger af den enkelte persons fysiske karakteristika, alder, køn, vægt, ganghastighed mm. Figuren nedenfor illustrerer typisk belastning fra én person som funktion af tid. Det noteres at den lodrette belastning består af to bidrag – et statisk bidrag svarende til personens egenvægt (ca. 700 N), samt et oscillerende bidrag som svinger omkring middelværdien. Det oscillerende bidrag har en dominerende frekvens svarende til gangfrekvensen. De vandrette belastninger ses at have et statisk (gennemsnitligt) bidrag lig nul, hvilket stemmer overens med at en persons bevægelse kun giver anledning til en statisk udbøjning i lodret retning. Dog opstår der dynamiske belastninger i både den tværgående og langsgående retning som skyldes accelerationen

af personens massemidt punkt ved gang. Den tværgående last har en grundfrekvens, som er den halve af gangfrekvensen, mens den langsgående last har en grundfrekvens lig gangfrekvensen.

Afhængigt af konstruktionens egenfrekvens og tilhørende svingningsformer, kan alle tre bidrag føre til uønskede svingninger. I denne artikel tages udgangspunkt i den lodrette del af belastningen, da dette er den mest hyppigt forekomne situation.



Figur 1: Typiske laster fra én fodgænger opløst i henholdsvis lodret (øverst), tværgående (midterst) og langsgående (nederst) retning (figuren stammer fra [14]).

## LASTMODEL FOR LODRETTE LASTER H IDRØRENDE FRA GANG

Lasten fra fodgænger beskrives normalt som en trunkeret Fourier række, hvor bidrag op til den fjerde lastharmoniske medtages. Dette bygger på en antagelse at alle fodtrin er identiske og at gangfrekvensen er konstant og uden nogen form for variation. Denne antagelse er godt på den sikre side, men accepteres for nuværende.

Den trunkerede Fourier-række skrives som:

$$F(t) = G_p \left[ 1 + \sum_{j=1}^4 \alpha_j \sin(2j\pi f_p t - \varphi_j) \right]$$

$$= G_p + \alpha_1 G_p \sin(2\pi f_p t) + \alpha_2 G_p \sin(4\pi f_p t - \varphi_2) + \alpha_3 G_p \sin(6\pi f_p t - \varphi_3) + \alpha_4 G_p \sin(8\pi f_p t - \varphi_4)$$

Hvor

$G_p$  : den gennemsnitlige statiske personlast

$\alpha_j$  : amplitdefaktoren for den  $j$ 'te harmoniske lastkomponent

$f_p$  : personens bevægelsesfrekvens

$\varphi_j$  : faseforskydning for den  $j$ 'te bevægelsesfrekvens,

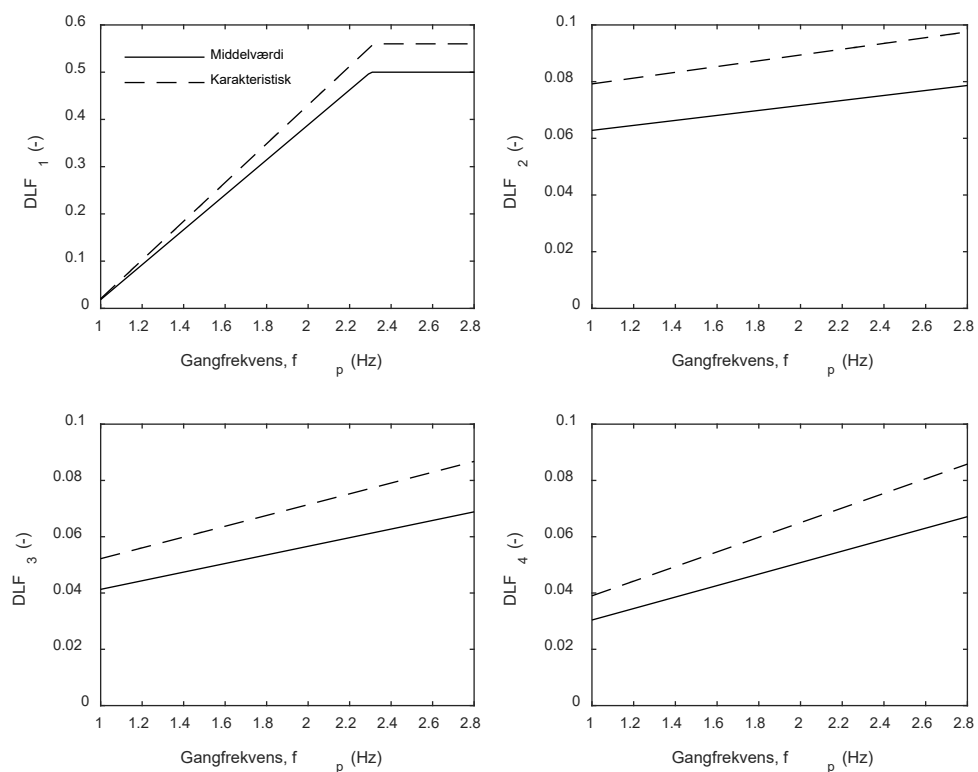
For ganglaster findes en række undersøgelser til bestemmelse af amplitdefaktorerne og her anbefales brugen af frekvensafhængige faktorer som angivet i tabel 1. Disse faktorer bygger på forskning foretaget i England, som anbefales i moderne guidelines for fodgængerinducerede laster [6-9]. Lastmodellens form er således i overensstemmelse med det DK NA til EN 1991-1-1 [5] bortset fra, at der anvendes andre amplitdefaktorer, der mere korrekt afspejler den virkelige last fra gående personer og dens statistiske fordeling. Til sammenligning fremgår lastamplituderne fra DK NA til EN 1991-1-1 i tabel 2. Amplitdefaktorer for andre aktiviteter såsom løb, hop og dans findes også og kan anvendes i en lignende lastmodel. De behandles dog ikke her, bortset fra at hyppigt brugte værdier er at finde i Tabel 3 og Tabel 4.

Aktivitet	Symbol	Frekvensområde (Hz)	Middelværdi (DLF)	Karakteristisk værdi (75%) (DLF)
Gang	$\alpha_1$	1 - 2,8 Hz	$0,37(f_p - 0,95) \leq 0,50$	$0,41(f_p - 0,95) \leq 0,56$
	$\alpha_2$	2 - 5,6 Hz	$0,054 + 0,0088f_p$	$0,069 + 0,0102f_p$
	$\alpha_3$	3 - 8,4 Hz	$0,026 + 0,0153f_p$	$0,033 + 0,0192f_p$
	$\alpha_4$	4 - 11,2 Hz	$0,010 + 0,0204f_p$	$0,013 + 0,0260f_p$
		> 11,2 Hz	0	0

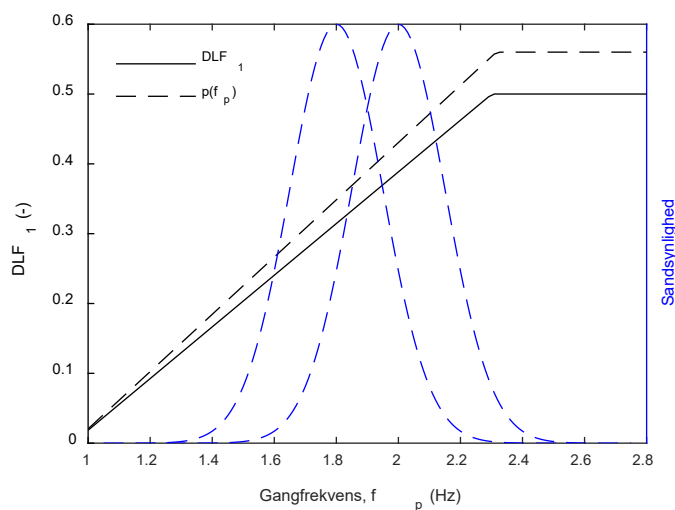
Tabel 1: Dynamiske (lodrette) lastfaktorer for gang i henhold til [8].

Aktivitet	Symbol	Frekvensområde (Hz)	Middelværdi (DLF)
Gang	$a_1$	1,6 – 2,4 Hz	0,40
	$a_2$	3,2 – 4,8 Hz	0,10
	$a_3$	4,8 – 7,2 Hz	0,06
		> 7,2 Hz	0

Tabel 2: Dynamiske (lodrette) lastfaktorer for gang i henhold til DK NA til EN 1991-1-1, [5].



Figur 2: Dynamiske lastfaktorer for de fire første harmoniske.



Figur 3: Dynamisk lastfaktor ( $DLF_1$ ) vist sammen med sandsynlighedsfordeling for gangfrekvenser med middelværdi på hhv. 1,80 Hz og 2,00 Hz og spredning på 0,15 Hz.

Aktivitet	Symbol	Frekvensområde (Hz)	Middelværdi (DLF)	Karakteristisk værdi (95%) (DLF)
Løb	$a_1$	2,0 – 4,0 Hz	$0,313(f_p + 1,20) \leq 1,25$	$0,375(f_p + 1,20) \leq 1,50$
	$a_2$	4,0 – 8,0 Hz	0,20	0,40
	$a_3$	8,0 – 12,0 Hz	0,10	0,20
		> 12,0 Hz	0	0

Tabel 3: Dynamiske (lodrette) lastfaktorer for løb.

Aktivitet	symbol	Frekvensområde (Hz)	DLF
Trapper	$a_1$	1,2 – 4,5 Hz	1,10
	$a_2$	2,4 – 9,0 Hz	0,22
		> 9,0 Hz	0

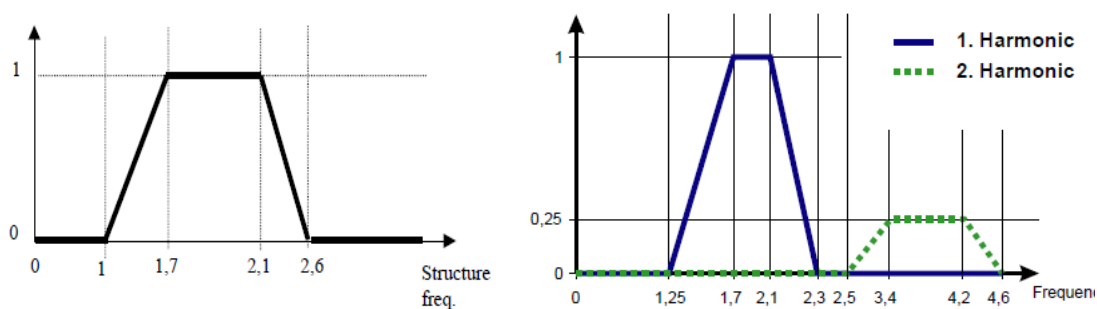
Tabel 4: Dynamiske (lodrette) lastfaktorer for løb i henhold til [8].

## PERSONERS GANGFREKVENNS VED FRI BEVÆGELIGHED

Den gennemsnitlige gangfrekvens målt for frit bevægelige personer varierer fra ca. 1,80 – 2,00 Hz afhængigt af under hvilke forhold målingerne er foretaget. Det viser sig ligeledes at gangfrekvenserne er nogenlunde normalfordelte med en standardafvigelse der varierer mellem 0,1 – 0,2 Hz [17]. Den nedre hhv. øvre 5% fraktil kan dermed udledes til 1,55 Hz og 2,25 Hz (antaget standardafvigelse 0,15 Hz). Det danske nationale annekst til EN 1991-1-1 [5] angiver frekvensintervallet 1,60 – 2,40 Hz og tabel 1 angiver frekvenser op til 2,80 Hz for gående personer. I begge tilfælde svarer det til konservative intervaller i forhold til faktiske observationer. Som det fremgår af Figur 2, opstår de største dynamiske belastninger ved den første lastharmoniske ( $DLF_1$ ) og ved den største mulige gangfrekvens ( $f_p > 2,2$  Hz). Det vil sige, jo hurtigere en person bevæger sig, jo større dynamiske laster opstår.

Dog viser fordelingen af gangfrekvenser, at de mest sandsynlige gangfrekvenser koncentrerer sig omkring middelværdierne 1,80 – 2,00 Hz, hvilket også indrammer de mest sårbare konstruktioner i forhold til fodgængerinducerede vibrationer, jf. Figur 3.

Vejreglerne [18], som udgør det danske nationale annekst til Eurocode for broer, angiver ikke direkte en metode til eftervisning af broers komfort, men angiver at der kan anvendes metoden fra de førende europæiske guidelines [19]. Her tages der hensyn til ovenstående ved at indføre en reduktionsfaktor på den dynamiske last for broer, der har egenfrekvenser udenfor det primære frekvensområde (1,70 – 2,10 Hz).



Figur 4: Reduktionsfaktor for dynamiske laster (figur fra [3] til venstre og [19] til højre).

## GRUPPER AF PERSONER – EFFEKT AF PERSONTÆTHEDEN

De tidligere betragtninger omkring gangfrekvenserne og deres fordeling gælder, når hver person kan bevæge sig frit og uden at blive påvirket af de andre fodgængere eller broens geometri og randbetingelser. En gruppe af personer interagerer med hinanden og det viser sig, at en større gruppe af personer bevæger sig langsommere end personer, der kan bevæge sig frit. Dette er blandt andet dokumenteret i forsøg foretaget på DTU Byg og rapporteret i blandt andet reference [17]. Dette har en indirekte indflydelse på fordeling af gangfrekvenser i en gruppe af personer, idet

skridtlængden ( $l_p$ ), giver en direkte fysiologisk sammenhæng mellem ganghastighed ( $v_p$ ) og gangfrekvens ( $f_p$ ):

$$v_p = f_p \cdot l_p$$

Skridtlængden varierer faktisk med ganghastigheden fra ca. 0,5 – 0,9 m - ofte anvendes blot  $l_p = 0,75$  m. Når personerne i gruppen ikke kan bevæge sig frit, men tilpasser deres ganghastighed til gruppens samlede strømning, bliver spredningen på gangfrekvenserne mindre end i en gruppe, der bevæger sig helt frit. På samme tid falder gruppens gennemsnitlige gangfrekvens som indikeret på Figur 6. Denne effekt med den faldende gangfrekvens og mindre spredning bevirker, at det ikke nødvendigvis er den største tæthed af personer, der skaber de største vibrationer i en bro. Det er forfatterens vurdering og erfaring, at en tæt gruppe personer vil bevæge sig væsentligt langsommere. I modsat fald vil broer med egenfrekvens i området 2,4 – 3,5 Hz være væsentligt mere følsomme overfor enkelte fodgængere eller små grupper af fodgængere, der går hurtigt eller løber over broen, end en større gruppe af personer. Dette forhold er tydeligt beskrevet i f.eks. reference [20], der dokumenterer feltmålinger på en række gangbroer med egenfrekvenser udenfor det område, der er mest følsomt overfor normal gang.

## LASTMODELLER FOR PERSONINDUCEREDE BELASTNINGER

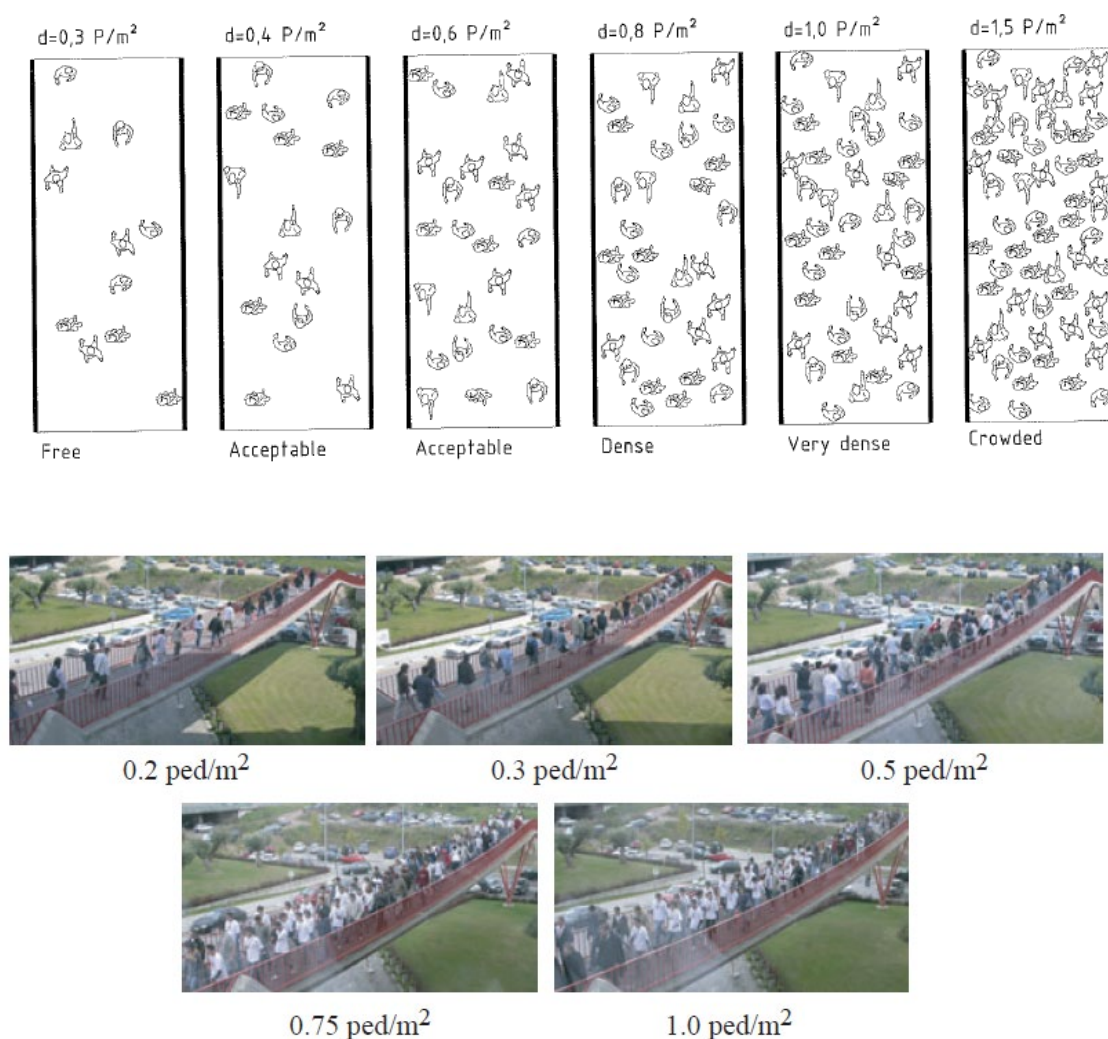
Ved undersøgelse af personinducerede svingninger i konstruktioner er der, som beskrevet ovenfor, en række hensyn, der skal tages. Afhængigt af konstruktionens form, funktion og dynamiske karakteristika kan konstruktionen være følsom overfor forskellige typer belastninger.

Konstruktioner med egenfrekvenser i området (1,8 – 2,3 Hz), vil være følsomme overfor grupper af personer og et frit flow af fodgængere, imens konstruktioner med egenfrekvenser i området (2,3 – 3,5 Hz) primært vil være følsomme overfor laster fra enkelte fodgængere og små grupper af personer, der enten går usædvanlig hurtigt, løber eller hopper på konstruktionen. I begge tilfælde exciteres konstruktionen af den første lastharmoniske og typiske konstruktioner med egenfrekvenser > 3,5 Hz er udendørs gangbroer med lange spænd. I mange tilfælde, kan komforten her eftervises ved at simulere den dynamiske belastning, enten ved at følge de foresimplede metoder i gældende guidelines [12,13,18] eller ved at udføre en mere detaljeret Monte Carlo simulering af det forventede flow af fodgængere. I andre tilfælde kræves tilføjelse af ekstern dæmpning i form af tunede massedæmpere (TMD). Netop tunede massedæmpere er en prisbillig og effektiv måde at reducere fodgængerinducerede svingninger.

Konstruktioner med egenfrekvenser i området 3,5 – 6,0 Hz exciteres ikke af den første lastharmoniske, men kategoriseres dog typisk som svingningsfølsomme konstruktioner, eller som konstruktioner med ofte ikke-tilfredsstillende komfort, jf. DK NA til DS/EN 1990 [4]. Typiske konstruktioner med egenfrekvenser i dette område inkluderer indendørs gangbroer, gulvkonstruktioner eller trapper med særdeles lange spænd, ophængte konstruktioner eller lignende. For disse konstruktioner vil det typisk være den modale (eller medsvingende) masse, sammen med det valgte komfortkriterie, der afgør

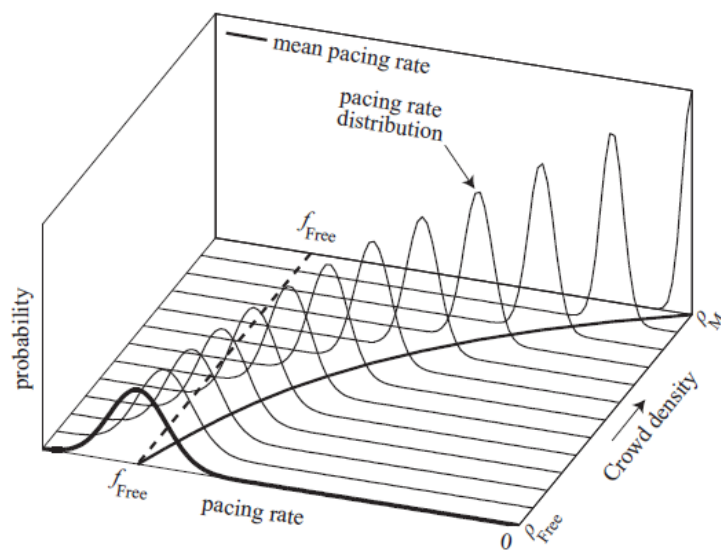
om konstruktionens komfort er tilfredsstillende eller om der kræves ekstern dæmpning (f.eks. tunede massedæmpere) eller forstærkninger.

Konstruktioner med egenfrekvenser  $> 8,0 - 10,0$  Hz beskrives i DK NA til DS/EN 1990 [4] som konstruktioner, hvor komforten normalt er tilfredsstillende. Dansk designpraksis har således været at eftervise konstruktioners egenfrekvens i overensstemmelse med disse krav. Det noteres dog at en hård grænse ved 8,0 Hz ikke har nogen praktisk betydning for komforten, da det vigtigste forhold er hvorvidt den 2. / 3. eller den 4. harmoniske af belastninger kan excitere konstruktionens egenfrekvens. Normal gang forgår med grundfrekvens op til 2,40 Hz og den tredje harmoniske kan således excitere egenfrekvenser op til 7,20 Hz. Konstruktioner med højere egenfrekvens exciteres derfor primært af den 4. lastharmoniske eller ved unormalt hurtig gang, løb eller hop.



Figur 5: Præsentation af forskellige persontætheder – figureerne stammer fra fib 2005 [11] og [16]





Figur 6: Skematisk visning af forholdet mellem den gennemsnitlige persontæthed og fordelingen af gangfrekvenser (figur fra [15]).

Dette betyder at konstruktioner helt ned til 6,0 Hz i mange tilfælde kan eftervises for at have tilfredsstillende komfort, især hvis det er gulvkonstruktioner med en relativt stor medsvingende masse. Her vil en forøgelse af stivheden blot medføre øgede omkostninger i projektet, hvorimod en analyse af komforten og en faktisk beregning af de personinducerede svingninger ofte kan vise sig at ligge indenfor de grænseaccelerationer, der kan tillades.

Når der projekteres konstruktioner, der udsættes for personinducerede svingninger, er det vigtigt at definere belastningen nøje og vurdere hvilke lastscenarier, der kan tænkes at forekomme. Samtidigt er det vigtigt at vurdere hvilke svingninger, der kan accepteres og opstille acceptkriterier for de forskellige scenarier. Der bør derfor generelt udarbejdes en dynamisk designbasis (som beskrevet i artiklen [KI Egenfrekvenser og grænseaccelerationer](#)), som danner grundlag for komforteftersvisningen og et eventuelt behov for forstærkninger eller dæmpningstiltag.

## REFERENCER

- [1] ISO 10137:2007, Basis for design of structures – Serviceability of buildings against vibration, International Standard Organisation, 2007
- [2] ISO 2631-1:1997, Mechanical vibration and shock – Evaluation of human exposure to whole-body vibration – Part 1: General requirements, International Standard Organisation, 1997
- [3] ISO 2631-2:2003, Mechanical vibration and shock – Evaluation of human exposure to whole-body vibration – Part 2: Vibration in buildings (1Hz to 80Hz), International Standard Organisation, 1997
- [4] EN 1990 DK NA:2019, Nationalt annekts til Eurocode 0: Projekteringsgrundlag for bærende konstruktioner. Erhvervs og byggestyrelsen, 2019
- [5] EN 1991-1-1 DK NA:2013, Nationalt annekts til Eurocode 1: Last på bygværker – Del 1-1: Generelle laster – Densiteter, egenlast og nyttelast for bygninger. Erhvervs- og byggestyrelsen, 2013.
- [6] Willford, Young, Field, The prediction of footfall induced vibrations, part 1. Structures and Buildings, Volume 160 – 2007, ICE, 2007
- [7] Willford, Young, Field, The prediction of footfall induced vibrations, part 2. Structures and Buildings, Volume 160 – 2007, ICE, 2007
- [8] The Concrete Centre, A design guide for footfall induced vibration of structures. A cement and concrete industry publication CCIP-016, 2006
- [9] Steel Construction Industry (SCI), Design of floors for vibrations: a new approach. SCI publication P354, 2007
- [10] Betonelement-Foreningen: Vibrationskomfort i dækkonstruktioner, Rev. Nr. 2. 2010
- [11] FIB, Guidelines for the design of footbridges, federation internationale du béton (fib) bulletin 32, 2005.
- [12] E. Caetano et al., Footbridge Vibration Design, CRC Press, 2009.
- [13] Setrá, Footbridges – Assessment of vibrational behavior of footbridges under pedestrian loading, 2006.
- [14] S. Zivanovic, A. Pavic and P. Reynolds, Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review. Journal of Sound and Vibration, vol. 279, 2005.
- [15] E. Ingolfsson, Pedestrian-induced lateral vibrations of footbridges. Experimental studies and probabilistic modelling, PhD Thesis, DTU Civil Engineering, 2011.
- [16] A. Cunha, E. Caetano, C. Moutinho, and F. Magalhaes. The role of dynamic testing in design, construction and long-term monitoring of lively footbridges. In Proceedings of Footbridge 2008, Third International Conference, Porto, 2-4 July 2008.

[17] Georgakis og Ingolfsson, Recent advances in our understanding of vertical and lateral footbridge vibrations, Footbridge 2014.

[18] Vejledning til belastnings- og beregningsgrundlag for broer (Vejregler), Vejdirektoratet, November 2017.

[19] Design of Lightweight Footbridges for Human Induced Vibrations, JRC, First Edition, May 2009

[20] G. Gudmundsson et.al., Serviceability Assessment of Three Lively Footbridges in Reykjavik, Footbridge 2008.